Matemáticas III

Parcial 3 - Guías 7 – 9

Farith J. Briceño N. - 2017

Material en revisión

Indice

Matemática III - Guía 7

Espacio Nulo. Espacio Imagen

Objetivos a cubrir

Código : MAT-3.7

- Espacio nulo y espacio imagen. Espacio fila y espacio columna.
- Producto interno en un espacio vectorial.
- Base ortonormales. Método de ortonormalización de Gram-Schmidt.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 133 *: Encuentre una base del espacio de solución,* H*, del sistema homogéneo dado por*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Solución : Observemos que el sistema es homogéneo, por lo tanto, es consistente, es decir, siempre tiene solución. Consideremos la matriz aumentada asociada al sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales sobre las filas de la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_1+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-4F_1+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2\to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\begin{cases} \text{De la tercera fila} \ : \ -2x_3 + 4x_4 = 0 \\ \text{De la segunda fila} \ : \ x_2 + \dfrac{7}{2}\,x_3 + x_4 = 0 \\ \text{De la primera fila} \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \boxed{x_3 = 2x_4} \\ x_2 + \dfrac{7}{2}\,x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 + \dfrac{7}{2}\ (2x_4) + x_4 = 0 \\ \\ x_1 + x_2 + (2x_4) + x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_2 = -8x_4} \\ \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 + (-8x_4) + 3x_4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_1 = 5x_4,}$$

con $x_4 \in \mathbb{R}$.

Luego, el sistema tiene infinitas soluciones,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5x_4 \\ -8x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, todo vector de $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in H$, se puede escribir como

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_4 \\ -8x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_4,$$

es decir,

$$H = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 = 5t; \ \ x_2 = -8t; \ \ x_3 = 2t; \ \ x_4 = t \right\}.$$

Veamos si el vector $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, es linealmente independiente, para ello consideramos la combinación lineal del vector $\boldsymbol{v}$ igualada al vector cero del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, así,

$$\alpha_1 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5\alpha_1 \\ -8\alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = 0,$$

por lo tanto, el vector $\boldsymbol{v}$ es L.I.

Luego, el conjunto

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

forma una base del conjunto de soluciones, H, del sistema homogéneo dado. ★

Ejemplo 134 *: Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}^n$, definido por*

$$N_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}.$$

*Demostrar que N_A es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ con las operaciones ordinarias definidas sobre $\mathbb{R}^n$. Este subespacio vectorial se conoce como el **espacio nulo** de A.*

Demostración : Es conocido que, un conjunto H es un subespacio de un espacio vectorial V, si se cumple las tres condiciones

1. El conjunto H es diferente de vacío, $H \neq \varnothing$.
2. El conjunto H es cerrado bajo la operación suma definida en el espacio vectorial V.
3. El conjunto H es cerrado bajo la operación multiplicación por un escalar definida en el espacio vectorial V.

Verificamos si $H = N_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ cumple con esta tres condiciones para que sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

1. ¿Es $N_A \neq \varnothing$? Es conocido que todo sistema homogéneo, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, siempre es **consistente**, es decir siempre tiene solución, en particular, el vector neutro, $\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

   Por lo tanto, $\boldsymbol{0} \in N_A$, así, $N_A \neq \varnothing$.

2. ¿Es N_A cerrado bajo la operación suma? Debemos demostrar que si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in N_A$, entonces $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ también debe pertenecer a N_A.

   Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ vectores en N_A, entonces, se cumple

   $$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \qquad \text{y} \qquad A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0},$$

   para garantizar que $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ pertenezca a N_A, se tiene que demostrar que dicho vector cumple con la propiedad del conjunto N_A, así,

   $$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0},$$

   se cumple con la propiedad del conjunto N_A, por lo tanto, el vector $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in N_A$.

   Concluimos que N_A es cerrado bajo la operación suma.

3. ¿Es N_A cerrado bajo la operación multiplicación por un escalar? Debemos demostrar que si $\boldsymbol{x} \in N_A$, y α es un escalar en el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, entonces $\alpha\boldsymbol{x}$ también debe pertenecer a N_A.

   Sea $\boldsymbol{x}$ un vector en N_A, entonces, se cumple

   $$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

   para garantizar que $\alpha\boldsymbol{x}$ pertenece a N_A, con α un escalar en el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, se tiene que demostrar que dicho vector cumple con la propiedad del conjunto N_A, así,

$$A(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha A\boldsymbol{x} = \alpha(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0},$$

se cumple la propiedad del conjunto N_A, por lo tanto, el vector $\alpha\boldsymbol{x} \in N_A$.

Concluimos que N_A es cerrado bajo la operación multiplicación por un escalar.

Luego, N_A cumple con las tres condiciones de subespacio vectorial, así, tenemos que

$$N_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

es un subespacio del espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$. ★

Ejemplo 135 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. *Hallar* N_A.

Solución : Para hallar N_A, debemos resolver el sistema homogéneo asociado a la matriz A dada, es decir, buscamos vectores $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, que satisfagan el sistema homogéneo

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Para ello, aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $(A|\boldsymbol{0})$, para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1 + F_3 \to F_3]{2F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-3F_2 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -42 & 27 & 0 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{De la tercera fila} \ : \ -42x_3 + 27x_4 = 0 \\[2mm] \text{De la segunda fila} \ : \ x_2 + 11x_3 - 7x_4 = 0 \\[2mm] \text{De la primera fila} \ : \ x_1 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_3 = \dfrac{9}{14}x_4} \\[2mm] x_2 + 11x_3 - 7x_4 = 0 \\[2mm] x_1 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 + 11\left(\dfrac{9}{14}x_4\right) - 7x_4 = 0 \\[4mm] x_1 + 4\left(\dfrac{9}{14}x_4\right) - 3x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_2 = -\dfrac{1}{14}x_4} \\[4mm] \boxed{x_1 = \dfrac{3}{7}x_4,} \end{array} \right.$$

con $x_4 \in \mathbb{R}$.

Entonces, el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones, las cuales vienen dadas por

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7}x_4 \\ -\dfrac{1}{14}x_4 \\ \dfrac{9}{14}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} \\ -\dfrac{1}{14} \\ \dfrac{9}{14} \\ 1 \end{pmatrix} x_4, \qquad \text{con} \quad x_4 \in \mathbb{R},$$

o equivalentemente, considerando un vector múltiplo escalar,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} \left(\frac{x_4}{14}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} t, \qquad \text{donde} \quad t = \frac{x_4}{14} \in \mathbb{R}.$$

Luego,

$$N_A = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}\right] = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 = 6t; \ \ x_2 = -t; \ \ x_3 = 9t; \ \ x_4 = 14t, \quad \text{con } \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

★

Ejemplo 136 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. *Hallar* N_A.

Solución : Para hallar N_A, debemos resolver el sistema homogéneo asociado a la matriz A dada, es decir, buscamos vectores $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, que satisfagan el sistema homogéneo

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Para ello, aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $(A|\mathbf{0})$, para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-2F_1 + F_4 \to F_4]{-2F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & -11 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & -11 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-8F_2+F_4\to F_4]{-5F_2+F_3\to F_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -9 & -10 & 0\\ 0 & 0 & -19 & -28 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{9}F_3\to F_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{10}{9} & 0\\ 0 & 0 & -19 & -28 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{19F_3+F_4\to F_4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{10}{9} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{62}{9} & 0\end{array}\right),$$

entonces,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{De la cuarta fila}\ :\ -\dfrac{62}{9}x_4=0\\ \text{De la tercera fila}\ :\ x_3+\dfrac{10}{9}x_4=0\\ \text{De la segunda fila}\ :\ x_2+x_3+3x_4=0\\ \text{De la primera fila}\ :\ x_1-3x_2+4x_3=0\end{array}\right.\implies\left\{\begin{array}{l}\boxed{x_4=0}\\ x_3+\dfrac{10}{9}x_4=0\\ x_2+x_3+3x_4=0\\ x_1-3x_2+4x_3=0\end{array}\right.$$

$$\implies\left\{\begin{array}{l} x_3+\dfrac{10}{9}(0)=0\\ x_2+x_3+3(0)=0\\ x_1-3x_2+4x_3=0\end{array}\right.\implies\left\{\begin{array}{l}\boxed{x_3=0}\\ x_2+x_3=0\\ x_1-3x_2+4x_3=0\end{array}\right.$$

$$\implies\left\{\begin{array}{l} x_2+(0)=0\\ x_1-3x_2+4(0)=0\end{array}\right.\implies\left\{\begin{array}{l}\boxed{x_2=0}\\ x_1-3x_2=0\end{array}\right.$$

$$\implies\quad x_1-3(0)=0\quad\implies\quad\boxed{x_1=0.}$$

Así, el sistema homogéneo tiene una única solución, la solución trivial, el elemento neutro del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, es decir, $\mathbf{0}=(0,0,0,0)$.

Luego, $N_A=\{\mathbf{0}\}$. ★

Ejemplo 137 *: Sea* $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$. *Hallar* N_A.

Solución : Para hallar N_A, debemos resolver el sistema homogéneo asociado a la matriz A dada, es decir, buscamos vectores $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$, que satisfagan el sistema homogéneo

$$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}.$$

Para ello, aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $(A|\mathbf{0})$, para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_3 \to F_3]{-4F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -15 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -11 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -\dfrac{4}{3} & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -11 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -\dfrac{4}{3} & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{De la tercera fila } : \ 4x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ \text{De la segunda fila } : \ x_2 + 5x_3 - \dfrac{4}{3}x_4 - \dfrac{1}{3}x_5 = 0 \\ \text{De la primera fila } : \ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} \boxed{x_3 = \dfrac{3}{4}x_4 - x_5} \\ x_2 + 5x_3 - \dfrac{4}{3}x_4 - \dfrac{1}{3}x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{array}{l} x_2 + 5\left(\dfrac{3}{4}x_4 - x_5\right) - \dfrac{4}{3}x_4 - \dfrac{1}{3}x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4\left(\dfrac{3}{4}x_4 - x_5\right) - x_4 = 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} \boxed{x_2 = \dfrac{16}{3}x_5 - \dfrac{29}{12}x_4} \\ x_1 + x_2 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \end{array}\right.$$

$$\implies x_1 + \left(\frac{16}{3}x_5 - \frac{29}{12}x_4\right) + 2x_4 - 4x_5 = 0 \implies \boxed{x_1 = \frac{5}{12}x_4 - \frac{4}{3}x_5,}$$

con $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

Entonces, el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones, las cuales vienen dadas por

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{12}x_4 - \dfrac{4}{3}x_5 \\ \dfrac{16}{3}x_5 - \dfrac{29}{12}x_4 \\ \dfrac{3}{4}x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{12}x_4 \\ -\dfrac{29}{12}x_4 \\ \dfrac{3}{4}x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3}x_5 \\ \dfrac{16}{3}x_5 \\ -x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{12} \\ -\dfrac{29}{12} \\ \dfrac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{16}{3} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5,$$

con $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$, o equivalentemente, considerando un vector múltiplo escalar,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -29 \\ 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{x_4}{12}\right) + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\frac{x_5}{3}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -29 \\ 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} s, \qquad \text{con} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

donde $t = \dfrac{x_4}{12}$ y $s = \dfrac{x_5}{3}$.

Luego,

$$N_A = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ -29 \\ 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \ / \ \begin{array}{l} x_1 = 5t - 4s; \quad x_2 = -29t + 16s; \\ x_3 = 9t - 3s; \quad x_4 = 12t; \\ x_5 = 3s, \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

★

Ejemplo 138 *: Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}^m$, definido por*

$$\text{Imagen}\,(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \quad \textit{para algún } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Demostrar que Imagen (A) *es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$ con las operaciones ordinarias definidas sobre $\mathbb{R}^m$. Este subespacio vectorial se conoce como la **imagen** de A.*

Demostración : Es conocido que, un conjunto H es un subespacio de un espacio vectorial V, si se cumple las tres condiciones

1. El conjunto H es diferente de vacío, $H \neq \varnothing$.
2. El conjunto H es cerrado bajo la operación suma definida en el espacio vectorial V.
3. El conjunto H es cerrado bajo la operación multiplicación por un escalar definida en el espacio vectorial V.

Verificamos si $H = \text{Imagen}\,(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \ \text{ para algún } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ cumple con esta tres condiciones para que sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

1. ¿Es Imagen $(A) \neq \varnothing$? Veamos si el elemento neutro $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ pertenece a Imagen (A), para ello, debemos demostrar que existe un vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ que sea solución del sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

   Es conocido que todo sistema homogéneo, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, siempre es **consistente**, es decir siempre tiene solución, en particular, el vector neutro, $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

   Por lo tanto, $\mathbf{0} \in \text{Imagen}\,(A)$, así, $\text{Imagen}\,(A) \neq \varnothing$.

2. ¿Es Imagen (A) cerrado bajo la operación suma? Debemos demostrar que si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \text{Imagen}\,(A)$, entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ también debe pertenecer a Imagen (A).

   Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ vectores en Imagen (A), entonces, se cumple, que para algunos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^n$, que

   $$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}, \qquad \text{y} \qquad A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y},$$

   para garantizar que $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ pertenezca a Imagen (A), se tiene que demostrar que dicho vector cumple con la propiedad del conjunto Imagen (A), es decir, existe un vector en $\mathbb{R}^n$, tal que dicho vector sea solución del sistema no homogéneo $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, así,

   $$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{a} + A\boldsymbol{b} = A\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = A\boldsymbol{z},$$

   se cumple con la propiedad del conjunto Imagen (A), por lo tanto, el vector $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \text{Imagen}\,(A)$.

   Concluimos que Imagen (A) es cerrado bajo la operación suma.

3. ¿Es $\text{Imagen}(A)$ cerrado bajo la operación multiplicación por un escalar? Debemos demostrar que si $\boldsymbol{y} \in \text{Imagen}(A)$, y α es un escalar en el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, entonces $\alpha\boldsymbol{y}$ también debe pertenecer a $\text{Imagen}(A)$.

   Sea $\boldsymbol{y}$ un vector en $\text{Imagen}(A)$, entonces, para algún vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ se cumple

   $$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y},$$

   para garantizar que $\alpha\boldsymbol{y}$ pertenece a $\text{Imagen}(A)$, con α un escalar en el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, se tiene que demostrar la existencia de un vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, tal que el sistema no homogéneo $A\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{y}$ tenga solución.

   $$\alpha\boldsymbol{y} = \alpha A\boldsymbol{a} = A(\alpha\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{b},$$

   por lo tanto, el sistema no homgéneo $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$, tiene solución, es decir, se cumple la propiedad del conjunto $\text{Imagen}(A)$, por lo tanto, el vector $\alpha\boldsymbol{y} \in \text{Imagen}(A)$.

   Concluimos que $\text{Imagen}(A)$ es cerrado bajo la operación multiplicación por un escalar.

Luego, $\text{Imagen}(A)$ cumple con las tres condiciones de subespacio vectorial, así, tenemos que

$$\text{Imagen}(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \quad \text{para algún } \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

es un subespacio del espacio vectorial $V = \mathbb{R}^m$. ★

Ejemplo 139 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Hallar* $\text{Imagen}(A)$.

Solución : Es conocido que, si A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces

$$\text{Imagen}(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \quad \text{para algún } \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\},$$

es decir, un vector $\boldsymbol{y} \in \text{Imagen}(A)$, si para algún vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, se cumple que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

Sea $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \text{Imagen}(A)$, entonces para algún $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, se cumple

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

de aquí, se obtiene el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_4 = y_2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = y_3 \\ -x_1 - 4x_2 + x_4 = y_4. \end{cases}$$

Observemos que este sistema se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} -2x_1 \\ -3x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_2 \\ x_2 \\ -4x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ 4x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

equivalentemente

$$x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

así, hemos escrito el vector genérico $\boldsymbol{y} \in \text{Imagen}\,(A)$ como una combinación lineal de los vectores

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\text{Imagen}\,(A) = \text{gen}\ [\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}]\,.$$

Hallamos el espacio generado por los vectores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}$. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $(A|\boldsymbol{y})$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 & y_1 \\ -3 & -2 & 0 & 4 & y_2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & y_3 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & y_4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & y_3 \\ -3 & -2 & 0 & 4 & y_2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & y_1 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & y_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 + F_4 \to F_4]{\substack{3F_1 + F_2 \to F_2 \\ 2F_1 + F_3 \to F_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & y_3 \\ 0 & 1 & 12 & 7 & y_2 + 3y_3 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & y_1 + 2y_3 \\ 0 & -3 & 4 & 5 & y_4 + y_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{-3F_2 + F_3 \to F_3 \\ 3F_2 + F_4 \to F_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & y_3 \\ 0 & 1 & 12 & 7 & y_2 + 3y_3 \\ 0 & 0 & -26 & -19 & y_1 - 3y_2 - 7y_3 \\ 0 & 0 & 40 & 23 & y_4 + 10y_3 + 3y_2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{26}F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & y_3 \\ 0 & 1 & 12 & 7 & y_2 + 3y_3 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{19}{26} & \dfrac{3y_2 + 7y_3 - y_1}{26} \\ 0 & 0 & 40 & 23 & y_4 + 10y_3 + 3y_2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-40F_3+F_4\to F_4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & y_3 \\ 0 & 1 & 12 & 7 & y_2+3y_3 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{19}{26} & \dfrac{3y_2+7y_3-y_1}{26} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{81}{13} & \dfrac{20y_1-21y_2-10y_3+13y_4}{13} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{13}{81}F_4\to F_4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & y_3 \\ 0 & 1 & 12 & 7 & y_2+3y_3 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{19}{26} & \dfrac{3y_2+7y_3-y_1}{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{21y_2+10y_3-20y_1-13y_4}{81} \end{array}\right),$$

de aquí,

$$x_1=\frac{14y_3-3y_2-28y_1-2y_4}{81}; \qquad x_2=\frac{2y_1+6y_2-y_3-23y_4}{81};$$

$$x_3=\frac{23y_1-12y_2+29y_3+19y_4}{162}; \qquad x_4=\frac{21y_2+10y_3-20y_1-13y_4}{81},$$

es decir, $\boldsymbol{y}\in \text{Imagen}\,(A)$ si el vector $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4$ tiene la forma

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{14y_3-3y_2-28y_1-2y_4}{81} \\ \dfrac{2y_1+6y_2-y_3-23y_4}{81} \\ \dfrac{23y_1-12y_2+29y_3+19y_4}{162} \\ \dfrac{21y_2+10y_3-20y_1-13y_4}{81} \end{pmatrix},$$

por lo tanto, para cualquier vector $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^4$, será posible encontrar un vector $\boldsymbol{x}$ en $\mathbb{R}^4$, tal que

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}.$$

Luego, $\text{Imagen}\,(A)=\mathbb{R}^4$. ★

Ejemplo 140 *: Sea* $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. *Hallar* $\text{Imagen}\,(A)$.

Solución : Es conocido que, si A es una matriz de tamaño $m\times n$, entonces

$$\text{Imagen}\,(A)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m \;/\; A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \;\text{ para algún }\; \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\},$$

es decir, un vector $\boldsymbol{y}\in \text{Imagen}\,(A)$, si para algún vector $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, se cumple que

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}.$$

Sea $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\in \text{Imagen}\,(A)$, entonces para algún $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, se cumple

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

de aquí, se obtiene el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \ x_3 = y_1 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 = y_2 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = y_3. \end{cases}$$

Observemos que este sistema se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

equivalentemente

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

así, hemos escrito el vector genérico $\boldsymbol{y} \in \text{Imagen}\,(A)$ como una combinación lineal de los vectores

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\text{Imagen}\,(A) = \text{gen}\ [\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}]\,.$$

Hallamos el espacio generado por los vectores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $(A|\boldsymbol{y})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & y_1 \\ 2 & 0 & 2 & y_2 \\ 3 & 1 & 4 & y_3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y_1}{2} \\ 2 & 0 & 2 & y_2 \\ 3 & 1 & 4 & y_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3F_1 + F_3 \to F_3]{-2F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y_1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{2y_3 - 3y_1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{5}{2}F_2 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y_1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2y_1 - 5y_2 + 2y_3}{2} \end{array}\right),$$

de aquí, el sistema tendrá solución si

$$\frac{2y_1 - 5y_2 + 2y_3}{2} = 0, \qquad \text{equivalentemente,} \qquad 2y_1 - 5y_2 + 2y_3 = 0,$$

es decir, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \text{Imagen}\,(A)$ si y solo si $2y_1 - 5y_2 + 2y_3 = 0$.

Luego,

$$\text{Imagen}\,(A) = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2y_1 - 5y_2 + 2y_3 = 0 \right\}.$$

★

Ejemplo 141 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Hallar* Imagen (A).

Solución : Es conocido que, si A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces

$$\text{Imagen}\,(A) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \quad \text{para algún } \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \right\},$$

es decir, un vector $\boldsymbol{y} \in$ Imagen (A), si para algún vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, se cumple que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

Sea $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in$ Imagen (A), entonces para algún $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, se cumple

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

de aquí, se obtiene el sistema no homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 + \ x_2 + 2x_3 + 4x_4 = & y_1 \\ 5x_2 - \ x_3 + \ x_4 = & y_2 \\ 2x_1 - 3x_2 - \ x_3 + \ x_4 = & y_3. \end{array} \right.$$

Observemos que este sistema se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 5x_2 \\ -3x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

equivalentemente

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

así, hemos escrito el vector genérico $\boldsymbol{y} \in$ Imagen (A) como una combinación lineal de los vectores

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\text{Imagen}\,(A) = \text{gen}\ [\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}]\,.$$

Hallamos el espacio generado por los vectores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}$. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $(A|\boldsymbol{y})$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 & y_1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & y_2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & y_3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 & y_1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & y_2 \\ 0 & -5 & -5 & -7 & y_3-2y_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 & y_1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & y_3-2y_1+y_2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{6}F_3\to F_3]{\frac{1}{5}F_2\to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 & y_1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{5} & \dfrac{y_2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dfrac{2y_1-y_2-y_3}{6} \end{array}\right),$$

de aquí,

$$x_1 = \frac{8y_1+5y_2+11y_3}{30} - \frac{8}{5}x_4; \qquad x_2 = \frac{2y_1+5y_2-y_3}{30} - \frac{2}{5}x_4; \qquad x_3 = \frac{2y_1-y_2-y_3}{6} - x_4,$$

es decir, $\boldsymbol{y} \in \text{Imagen}\,(A)$ si el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ tiene la forma

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8y_1+5y_2+11y_3}{30} - \dfrac{8}{5}x_4 \\ \dfrac{2y_1+5y_2-y_3}{30} - \dfrac{2}{5}x_4 \\ \dfrac{2y_1-y_2-y_3}{6} - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8y_1+5y_2+11y_3}{30} \\ \dfrac{2y_1+5y_2-y_3}{30} \\ \dfrac{2y_1-y_2-y_3}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\dfrac{8}{5} \\ -\dfrac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, para cualquier vector $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$, será posible encontrar un vector $\boldsymbol{x}$ en $\mathbb{R}^4$, tal que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

Observamos que x_1, x_2, x_3 dependen de x_4, puesto que $\text{Imagen}\,(A) \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces

$$\text{Imagen}\,(A) = \text{gen}\ [\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}]\,.$$

Luego, $\text{Imagen}\,(A) = \mathbb{R}^3$. ★

Ejemplo 142 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. *Hallar el espacio fila de la matriz* A.

Solución : Es conocido que, si A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces el espacio fila, denotado por R_A, viene dado por

$$R_A = \text{gen}\,[\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \ldots, \boldsymbol{r_m}]\,,$$

donde el vector $\boldsymbol{r_i} \in \mathbb{R}^n$, con $i = 1, 2, \ldots, m$, es la $i-$ésima fila de la matriz A.

Entonces, para la matriz $A \in M_{3\times 2}$, tenemos que

$$\boldsymbol{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R_A$ es un vector cualquiera del espacio fila, entonces $\boldsymbol{x}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$, $\boldsymbol{r_3}$, es decir, existen escalares α_1, α_2, α_3, α_4 en el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 - 2\alpha_2 & = & x_1 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 & = & x_2 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 & = & x_3 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_3 & = & x_4 \end{array} \right. .$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $(A|\boldsymbol{x})$.

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -2 & 0 & x_1 \\ 3 & 2 & 3 & x_2 \\ 4 & -3 & 1 & x_3 \\ -1 & 0 & -2 & x_4 \end{array} \right) \xrightarrow[F_1 + F_4 \to F_4]{\substack{-3F_1 + F_2 \to F_2 \\ -4F_1 + F_3 \to F_3}} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & 0 & x_1 \\ 0 & 8 & 3 & x_2 - 3x_1 \\ 0 & 5 & 1 & x_3 - 4x_1 \\ 0 & -2 & -2 & x_4 + x_1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{x_2 - 3x_1}{8} \\ 0 & 5 & 1 & x_3 - 4x_1 \\ 0 & -2 & -2 & x_4 + x_1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-5F_2 + F_3 \to F_3 \\ 2F_2 + F_4 \to F_4}} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{x_2 - 3x_1}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{8} & \frac{8x_3 - 5x_2 - 17x_1}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{x_1 + x_2 + 4x_4}{4} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\frac{5}{4}F_3 + F_4 \to F_4]{-\frac{8}{7}F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{x_2 - 3x_1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17x_1 + 5x_2 - 8x_3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23x_1 + 8x_2 - 10x_3 + 7x_4}{7} \end{array} \right).$$

Para obtener solución del sistema es necesario que

$$\frac{23x_1 + 8x_2 - 10x_3 + 7x_4}{7} = 0 \qquad \text{equivalentemente} \qquad 23x_1 + 8x_2 - 10x_3 + 7x_4 = 0,$$

por lo tanto, se tiene que el espacio fila de la matriz A es el hiperplano

$$R_A = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ 23x_1 + 8x_2 - 10x_3 + 7x_4 = 0 \right\}.$$

Otra manera de obtener R_A, es aplicar operaciones elementales sobre las filas de la matriz A, ubicamos las columnas donde aparezcan los pivotes, las filas correspondientes, donde aparecen los pivotes, generan al espacio fila de A, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1+F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{8}F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3F_2+F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{8}{7}F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{7} \end{pmatrix}.$$

Así, el espacio fila es generado por los vectores

$$R_A = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right].$$

Observamos que, a diferencia de la primera manera, aquí, **NO** obtenemos la forma explícita del espacio fila, R_A, sino los vectores que lo generan. ★

Ejemplo 143 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. *Hallar el espacio fila de la matriz* A.

Solución : Es conocido que, si A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces el espacio fila, denotado por R_A, viene dado por

$$R_A = \text{gen}\left[\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \ldots, \boldsymbol{r_m}\right],$$

donde el vector $\boldsymbol{r_i} \in \mathbb{R}^n$, con $i = 1, 2, \ldots, m$, es la $i-$ésima fila de la matriz A.

Entonces, para la matriz $A \in M_{4\times 3}$, tenemos que

$$\boldsymbol{r_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},$$

si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R_A$ es un vector cualquiera del espacio fila, entonces $\boldsymbol{x}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$, $\boldsymbol{r_3}$, $\boldsymbol{r_4}$ es decir, existen escalares α_1, α_2, α_3, α_4 en el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{rl} -2\alpha_2 + 2\alpha_3 - 3\alpha_4 &= x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \qquad &= x_2 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 \qquad - 6\alpha_4 &= x_3 \end{array} \right. .$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $(A|\boldsymbol{x})$.

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 0 & -2 & 2 & -3 & x_1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 2 & -2 & 0 & -6 & x_3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & x_1 \\ 2 & -2 & 0 & -6 & x_3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-2F_1 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & x_1 \\ 0 & -4 & 4 & -6 & x_3 - 2x_2 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{x_1}{2} \\ 0 & -4 & 4 & -6 & x_3 - 2x_2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{4F_2 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{x_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 - 2x_2 - 2x_1 \end{array} \right).$$

Para obtener solución del sistema es necesario que

$$x_3 - 2x_2 - 2x_1 = 0, \qquad \text{equivalentemente} \qquad 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,$$

por lo tanto, se tiene que el espacio fila de la matriz A es el plano

$$R_A = \text{gen} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

Otra manera de obtener R_A, es aplicar operaciones elementales sobre las filas de la matriz A, ubicamos las columnas donde aparezcan los pivotes, las filas correspondientes, donde aparecen los pivotes, generan al espacio fila de A, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1 \to F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3F_1 + F_4 \to F_4]{2F_1 + F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_2 + F_4 \to F_4]{F_2 + F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, el espacio fila es generado por los vectores

$$R_A = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right].$$

★

Ejemplo 144 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*. Hallar el espacio fila de la matriz* A*.*

Solución : Es conocido que, si A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces el espacio fila, denotado por R_A, viene dado por

$$R_A = \text{gen}\left[\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \ldots, \boldsymbol{r_m}\right],$$

donde el vector $\boldsymbol{r_i} \in \mathbb{R}^n$, con $i = 1, 2, \ldots, m$, es la $i-$ésima fila de la matriz A.

Entonces, para la matriz $A \in M_{4\times 5}$, tenemos que

$$\boldsymbol{r_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in R_A$ es un vector cualquiera del espacio fila, entonces $\boldsymbol{x}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$, $\boldsymbol{r_3}$, $\boldsymbol{r_4}$ es decir, existen escalares α_1, α_2, α_3, α_4 en el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{rl} -2\alpha_2 + 2\alpha_3 - 3\alpha_4 &= x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \qquad &= x_2 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 \qquad - 6\alpha_4 &= x_3 \\ +3\alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4 &= x_4 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \qquad + \alpha_4 &= x_5 \end{array} \right. .$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $(A|\boldsymbol{x})$.

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 0 & -2 & 2 & -3 & x_1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 2 & -2 & 0 & -6 & x_3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & x_5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & x_1 \\ 2 & -2 & 0 & -6 & x_3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & x_5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\,]{\substack{-2F_1+F_3\to F_3\\ -F_1+F_5\to F_5}} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & x_1 \\ 0 & -4 & 4 & -6 & x_3-2x_2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & x_4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & x_5-x_2 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2\to F_2} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{x_1}{2} \\ 0 & -4 & 4 & -6 & x_3-2x_2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & x_4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & x_5-x_2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2F_2+F_5\to F_5]{\substack{4F_2+F_3\to F_3\\ -3F_2+F_4\to F_4}} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{x_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3-2x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{2} & x_4+\dfrac{3}{2}x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & x_5-x_2-x_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3\longleftrightarrow F_5} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{x_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & x_5-x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{2} & x_4+\dfrac{3}{2}x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3-2x_2-2x_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}F_3\to F_3} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{x_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{x_5-x_2-x_1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{2} & x_4+\dfrac{3}{2}x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3-2x_2-2x_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{7}{1}F_3+F_4\to F_4} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{x_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{x_5-x_2-x_1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{5x_1-7x_2+8x_4+7x_5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3-2x_2-2x_1 \end{array}\right).$$

De la fila 5, se tiene que: $x_3-2x_2-2x_1=0.$

Por otra parte, de la fila 4, obtenemos

$$\frac{5x_1-7x_2+8x_4+7x_5}{8}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad 5x_1-7x_2+8x_4+7x_5=0,$$

de aquí,

$$R_A = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \ / \ x_3 - 2x_2 - 2x_1 = 0; \quad 5x_1 - 7x_2 + 8x_4 + 7x_5 = 0 \right\},$$

o equivalentemente, de $x_3 - 2x_2 - 2x_1 = 0,$ tenemos

$$x_3 - 2x_2 - 2x_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_3 = 2x_1 + 2x_2.$$

y de $5x_1 - 7x_2 + 8x_4 + 7x_5 = 0,$ tenemos

$$5x_1 - 7x_2 + 8x_4 + 7x_5 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_4 = \frac{7}{8}x_2 - \frac{5}{8}x_1 - \frac{7}{8}x_5,$$

así,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ \frac{7}{8}x_2 - \frac{5}{8}x_1 - \frac{7}{8}x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2x_1 \\ -\frac{5}{8}x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 2x_2 \\ \frac{7}{8}x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{7}{8}x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix},$$

así, hemos escrito el vector genérico $\boldsymbol{x}$ como una combinación lineal de los vectores

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$R_A = \text{gen} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

Otra manera de obtener R_A, es aplicar operaciones elementales sobre las filas de la matriz A, ubicamos las columnas donde aparezcan los pivotes, las filas correspondientes, donde aparecen los pivotes, generan al espacio fila de A, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_1 \to F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_1 + F_4 \to F_4]{2F_1 + F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -\dfrac{9}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -\dfrac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_2 + F_4 \to F_4]{F_2 + F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{9}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{9}F_4 \to F_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Así, el espacio fila es generado por los vectores

$$R_A = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

★

Ejemplo 145 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Hallar el espacio columna de* A.

Solución : Es conocido que, si A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces el espacio columna, denotado por C_A, viene dado por

$$C_A = \text{gen}\left[\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n}\right],$$

donde el vector $\boldsymbol{c_i} \in \mathbb{R}^m$, con $i = 1, 2, \dots, n$, es la $i-$ésima columna de la matriz A.

Entonces, para la matriz $A \in M_{3\times 4}$, tenemos que

$$\boldsymbol{c_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in C_A$ es un vector cualquiera del espacio columna, entonces $\boldsymbol{x}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$, $\boldsymbol{c_3}$, $\boldsymbol{c_4}$ es decir, existen escalares α_1, α_2, α_3, α_4 en el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_4 = x_1 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_4 = x_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 3\alpha_4 = x_3 \end{array} \right. .$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $(A|\boldsymbol{x})$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 & x_1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & x_2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & x_3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & x_2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & x_1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & x_3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[-2F_1 + F_3 \to F_3]{-2F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & x_2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & -5 & -1 & 5 & x_3 + 5x_2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2x_2 - x_1}{7} \\ 0 & -5 & -1 & 5 & x_3 + 5x_2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{5F_2 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{2x_2 - x_1}{7} \\ 0 & 0 & -1 & 5 & \dfrac{45x_2 - 5x_1 + 7x_3}{7} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{2x_2 - x_1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & \dfrac{5x_1 - 45x_2 - 7x_3}{7} \end{array} \right),$$

de aquí,

$$C_A = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \mathbb{R}^3,$$

ya que, obtenemos que el vector $\boldsymbol{c_4}$ es dependiente de los vectores $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$ y $\boldsymbol{c_3}$. Como C_A es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3, es decir, $\mathbb{R}^3$ se genera con tres vectores, se concluye que $C_A = \mathbb{R}^3$.

Otra manera de obtener C_A, es aplicar operaciones elementales sobre las filas de la matriz A, ubicamos las columnas donde aparezcan los pivotes, dichas columnas generan al espacio columna de A, es decir

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2F_1+F_3\to F_3]{-2F_1+F_2\to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}F_2\to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5F_2+F_3\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_3\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$C_A = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

Observamos que, a diferencia de la primera manera, aquí, **NO** obtenemos la forma explícita del espacio columna, C_A, sino los vectores que lo generan. ★

Ejemplo 146 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Hallar el espacio columna de* A.

Solución : Es conocido que, si A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces el espacio columna, denotado por C_A, viene dado por

$$C_A = \text{gen}\left[\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \ldots, \boldsymbol{c_n}\right],$$

donde el vector $\boldsymbol{c_i} \in \mathbb{R}^m$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, es la $i-$ésima columna de la matriz A.

Entonces, para la matriz $A \in M_{4\times 4}$, tenemos que

$$\boldsymbol{c_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c_4} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in C_A$ es un vector cualquiera del espacio columna, entonces $\boldsymbol{x}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$, $\boldsymbol{c_3}$, $\boldsymbol{c_4}$ es decir, existen escalares α_1, α_2, α_3, α_4 en el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 = x_1 \\ 8\alpha_2 + 2\alpha_3 + 6\alpha_4 = x_2 \\ 3\alpha_1 + 7\alpha_2 - 2\alpha_3 = x_3 \\ -2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = x_4 \end{cases}.$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $(A|\boldsymbol{x})$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 4 & 6 & x_1 \\ 0 & 8 & 2 & 6 & x_2 \\ 3 & 7 & -2 & 0 & x_3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 2 & 2 & x_4 \\ 0 & 8 & 2 & 6 & x_2 \\ 3 & 7 & -2 & 0 & x_3 \\ -3 & 1 & 4 & 6 & x_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}F_1 \longleftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -\dfrac{x_4}{2} \\ 0 & 8 & 2 & 6 & x_2 \\ 3 & 7 & -2 & 0 & x_3 \\ -3 & 1 & 4 & 6 & x_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3F_1 + F_4 \to F_4]{-3F_1 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -\dfrac{x_4}{2} \\ 0 & 8 & 2 & 6 & x_2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & x_3 + \dfrac{3}{2}x_4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & x_1 - \dfrac{3}{2}x_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -\dfrac{x_4}{2} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{8}x_2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & x_3 + \dfrac{3}{2}x_4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & x_1 - \dfrac{3}{2}x_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4F_2 + F_4 \to F_4]{-4F_2 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -\dfrac{x_4}{2} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{8}x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 + \dfrac{3}{2}x_4 - \dfrac{1}{2}x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 - \dfrac{3}{2}x_4 - \dfrac{1}{2}x_2 \end{array}\right),$$

de aquí, de la fila 4, se tiene

$$x_1 - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \qquad \implies \qquad 2x_1 - 3x_4 - x_2 = 0 \qquad \implies \qquad x_2 = 2x_1 - 3x_4,$$

de la fila 3, se tiene

$$x_3 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x_3 + 3x_4 - x_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = 2x_3 + 3x_4,$$

así,

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 - 3x_4 \\ x_2 = 2x_3 + 3x_4 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad 2x_1 - 3x_4 = 2x_3 + 3x_4 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_3 + 3x_4,$$

luego,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + 3x_4 \\ 2x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_4 \\ 3x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$C_A = \operatorname{gen}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x_1 - 3x_4 - x_2 = 0, \ \ 2x_3 + 3x_4 - x_2 = 0\right\}.$$

Otra manera de obtener C_A, es aplicar operaciones elementales sobre las filas de la matriz A, ubicamos las columnas donde aparezcan los pivotes, dichas columnas generan al espacio columna de A, es decir

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}F_1 \longleftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_1 + F_4 \to F_4]{-3F_1 + F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4F_2 + F_4 \to F_4]{-4F_2 + F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$C_A = \operatorname{gen}\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}\right].$$

★

Ejemplo 147 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. *Hallar la nulidad y el rango de* A.

Solución : Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz A

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1 \to F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1+F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{6}F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3F_2+F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, como la matriz escalonada, equivalente a la matriz A tiene 3 pivotes, tenemos que

$$\rho(A) = 3,$$

por el resultado que establece

$$\rho(A) + \upsilon(A) = \text{ número de columna de la matriz } A,$$

tenemos que

$$3 + \upsilon(A) = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad \upsilon(A) = 0.$$

★

Ejemplo 148 *: Demuestre que si* A *es una matriz cuadrada de orden* n, *entonces,* A *es invertible si y solo si* $\upsilon(A) = 0$.

Demostración : Supongamos, en primer lugar que A es invertible, así, el sistema homgéneo asociado a la matriz A, es decir, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, tiene solución única, solución trivial, por lo tanto,

$$N_A = \{\mathbf{0}\},$$

puesto que, el vector nulo (elemento neutro de $\mathbb{R}^n$) es linealmente dependiente, se tiene que no hay vectores en la base de N_A, por lo que

$$\upsilon(A) = \dim N_A = 0.$$

Supongamos que, $\upsilon(A) = 0$. De aquí, se sigue que

$$N_A = \{\mathbf{0}\},$$

es decir, la única solución del sistema homogéneo asociado a la matriz A, es la solución trivial, por lo tanto, la matriz A es invertible. ★

Ejemplo 149 *: Demuestre que si* A *es una matriz cuadrada de orden* n, *entonces,* A *es invertible si y solo si* $\rho(A) = n$.

Demostración : Supongamos, en primer lugar que A es invertible, por el resultado del ejemplo 148, se tiene que

$$\upsilon(A) = 0.$$

Por otra parte, es conocido que

$$\rho(A) + \upsilon(A) = \text{ número de columna de la matriz } A,$$

es decir

$$\rho(A) + \upsilon(A) = n,$$

con lo que

$$\rho(A) + (0) = n \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(A) = n.$$

Supongamos que $\rho(A) = n$. Entonces, del resultado que establece

$$\rho(A) + \upsilon(A) = n,$$

se tiene que

$$\upsilon(A) = 0,$$

por el resultado del ejemplo 148. se concluye que A es invertible. ★

Ejemplo 150 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

a. Hallar bases ortonormales para el espacio nulo y la imagen de la matriz.

b. Sean $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$ *y* $H^{\perp}$ *el complemento ortogonal de* N_A. *Hallar* $\boldsymbol{h} \in N_A$ *y* $\boldsymbol{p} \in H^{\perp}$, *tales que* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{p}$.

Solución : *a.* Para obtener el espacio nulo de A, resolvemos el sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_1+F_3 \to F_3]{-2F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De la fila 1, se tiene que $x - y - 2z = 0$, por lo tanto, la solución del sistema es

$$N_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \; / \; x - y - 2z = 0 \right\}.$$

Buscamos una base para N_A. De la expresión $x - y - 2z = 0$, se tiene que $x = y + 2z$, es decir, que todo vector de N_A tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con lo que concluimos que, todo vector de N_A se puede escribir como combinación lineal de los vectores

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con α_1 es igual a la segunda componente del vector genérico de N_A y α_2 es igual a la tercera componente. En partícular el vector cero de $\mathbb{R}^3$, se escribe como

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

puesto que, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, se tiene el conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ es un conjunto L.I., luego ellos son una base para N_A

$$\beta_{N_A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por otro lado, puesto que, Imagen $A = C_A$, entonces

$$\text{Imagen } A = \text{gen} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right],$$

como todo vector único, diferente de cero, es L.I., se tiene que una base para Imagen A, viene dada por

$$\beta_{\text{Imagen } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Buscamos las bases **ortonormales** para N_A e Imagen A.

a.1. Para N_A. Ortonormalizamos la base β_{N_A}.

a.1.1. Elección del primer vector unitario:

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{\boldsymbol{v_1}}{\|\boldsymbol{v_1}\|},$$

donde

$$\|\boldsymbol{v_1}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1} \rangle} = \sqrt{\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_1}} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{2},$$

así,

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a.1.2. Elección del segundo vector unitario:

$$\boldsymbol{u_2} = \frac{\boldsymbol{v_2'}}{\|\boldsymbol{v_2'}\|},$$

donde,

$$\boldsymbol{v_2'} = \boldsymbol{v_2} - \langle \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{u_1} \rangle = (\boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{u_1})\, \boldsymbol{u_1},$$

puesto que,

$$\langle \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{u_1} \rangle = \boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{u_1} = (2, 0, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

tenemos que,

$$\boldsymbol{v_2'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

normalizamos

$$\left\|\boldsymbol{v_2'}\right\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_2} \rangle} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3},$$

luego,

$$\boldsymbol{u_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la base ortonormal de N_A es

$$\beta_{N_{A\,orto}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a.2. Para Imagen A. Puesto que, la base de Imagen A tiene un solo vector, entonces solamente normalizamos

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|},$$

donde,

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14},$$

entonces,

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la base ortonormal de Imagen A es

$$\beta_{\text{Imagen A}_{\text{orto}}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

b. Tenemos que

$$\boldsymbol{h} = \text{proy}_{N_A} \boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u_1} \rangle \boldsymbol{u_1} + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u_2} \rangle \boldsymbol{u_2} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u_1})\, \boldsymbol{u_1} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u_2})\, \boldsymbol{u_2},$$

donde,

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u_1} \rangle = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u_1} = (1,1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \sqrt{2}$$

y

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u_2} \rangle = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u_2} = (1,1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

así,

$$\boldsymbol{h} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

luego

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

★

Ejercicios

1. Encuentre una base del espacio de solución, H, del sistema homogéneo dado por

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}.$$

2. Encuentre una base del espacio de solución, H, del sistema homogéneo dado por

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

3. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}^n$, definido por

$$N_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}.$$

Demostrar que N_A es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ con las operaciones ordinarias definidas sobre $\mathbb{R}^n$. Este subespacio vectorial se conoce como el **espacio nulo** de A.

4. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}^m$, definido por

$$\text{Imagen } (A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \quad \text{para algún } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Demostrar que Imagen (A) es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ con las operaciones ordinarias definidas sobre $\mathbb{R}^m$. Este subespacio vectorial se conoce como la **imagen** de A.

5. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}^n$, definido por

$$H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\}.$$

Demostrar que H **NO** es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

6. Compare los ejercicios 4. y 5. ¿Qué condición sobre su definición hace que uno sea subespacio y el otro no? Explique.

7. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Sean $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$, $\boldsymbol{r_3}$, $\dots$, $\boldsymbol{r_m}$ los vectores filas de la matriz A. Demostrar que

$$R_A = \text{gen } [\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}, \dots, \boldsymbol{r_m}]$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con las operaciones ordinarias definidas sobre $\mathbb{R}^n$. Este subespacio se denomina **espacio fila** de A.

8. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Sean $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$, $\boldsymbol{c_3}, \ldots,$ $\boldsymbol{c_n}$ los vectores columnas de la matriz A. Demostrar que
$$C_A = \text{gen } [\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}, \ldots, \boldsymbol{c_n}]$$
es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ con las operaciones ordinarias definidas sobre $\mathbb{R}^m$. Esta subespacio se denomina **espacio columna** de A.

9. Para cada una de las siguientes matrices

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad 3. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encuentre

(a) Una base para el espacio nulo de A.
(b) Una base para el espacio fila de A.
(c) Una base para el espacio columna de A.

10. Encuentre el rango y la nulidad de las matrices del ejercicio 9, luego verifique que los valores obtenidos satisfacen la fórmula $\rho(A) + \upsilon(A) = n$.

11. Sea $A_{4\times 5}$ equivalente por filas a B cuyas filas 1, 2, 3 y 4 son, respectivamente, $(1, 0, -2, 3, 0)$, $(0, 1, 2, 3, 1)$, $(0, 0, 0, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 0, 0)$. Hallar

(a) Nulidad y rango de A.
(b) Una base para el espacio fila de A.
(c) Una base para el núcleo de A.

12. ¿Una matriz de tamaño 4×5 puede tener todas sus columnas linealmente independientes?. ¿Y todas sus filas? Justificar la respuesta.

13. Si A es una matriz de tamaño 3×5 y $\operatorname{rgo} \mathrm{A} = \rho(\mathrm{A}) = 2$, ¿puede A tener todas sus columnas linealmente independientes? ¿Y todas sus filas? Justificar la respuesta.

14. Una matriz que no sea cuadrada ¿puede tener todas sus filas y todas sus columnas linealmente independientes? Justificar la respuesta.

15. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

(a) Hallar una base para el núcleo de A.
(b) Hallar la nulidad, el rango y una base para la imagen de A.
(c) Hallar una base para el espacio fila de A y completarla hasta formar una base de $\mathbb{R}^4$.

16. Encuentre una base el espacio nulo de la matriz A dada y su nulidad

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad 3. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix} \qquad 5. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

17. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERAS** ó **FALSAS**.

(a) Si A es equivalente por filas a la identidad, entonces $C_A = C_I$.

(b) Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores de un espacio vectorial V de dimensión 3 y $\boldsymbol{w}$ es otro vector de V que no está en $\operatorname{gen}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$, entonces $\operatorname{gen}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]$.

(c) Si A es invertible, entonces $R_a = C_A$.

(d) El conjunto $\{(1,2,1),\ (1,0,1),\ (2,2,2),\ (4,4,4)\}$ genera a un plano de $\mathbb{R}^3$.

(e) Sea la base $B = \left\{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2\right\}$ de $\mathbb{P}_2$ y el polinomio $p(x)$, tal que los coeficientes del polinomio en la base B son $(2,-3,1)$. Entonces, $p(x) = -2x + x^2$.

(f) Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ de $\mathbb{R}^3$, tales que $\operatorname{gen}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}] = \mathbb{R}^3$, Entonces $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son linealmente independientes.

(g) La dimensión de $H = \operatorname{gen}[(1,-1,1),\ (2,0,3),\ (3,-1,4)]$ es 3.

(h) El conjunto de soluciones de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas no homogéneo es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(i) Todo conjunto de vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$ tiene más de tres vectores.

(j) Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, tales que ninguno es múltiplo escalar de otro. Entonces son linealmente dependientes.

(k) Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes. Entonces alguno de ellos es múltiplo escalar de otro.

(l) $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ es el único conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.

(m) Cualquier conjunto de vectores de un espacio vectorial V que no es una base no genera a dicho espacio.

(n) Si $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ es linealmente independiente, entonces $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\}$ es linealmente dependiente.

(o) Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ generan a V y $\boldsymbol{w} \in V$, entonces $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ generan a V.

(p) Si $\rho(A) = n$ y B y C son $n \times n$, tales que $AB = AC$, entonces $B = C$.

(q) Si $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente en V y si $c_1, c_2, c_3 \ldots, c_n$ son escalares no nulos, entonces $\{c_1\boldsymbol{v_1}, c_2\boldsymbol{v_2}, c_3\boldsymbol{v_3},\ldots,c_n\boldsymbol{v_n}\}$ es linealmente independiente.

18. Decir cuáles de las siguientes funciones reales son producto escalar

(a) En $\mathbb{R}^2$, $\langle (x_1,x_2);(y_1,y_2)\rangle = x_1y_2 + x_2y_1$.

(b) En $\mathbb{R}^3$, $\langle (x_1,x_2,x_3);(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$.

(c) En $\mathbb{P}_2$, $\langle p(x);q(x)\rangle = p'(0)\,q(0)$.

(d) En $\mathbb{R}^2$, $\langle (x_1,x_2);(y_1,y_2)\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$.

(e) En $\mathbb{R}^2$, $\langle (x_1,x_2);(y_1,y_2)\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_1y_2 - x_2y_1$.

(f) En $\mathbb{R}^2$, $\langle (x_1,x_2);(y_1,y_2)\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$.

(g) En $\mathbb{R}^2$, $\langle (x_1,x_2);(y_1,y_2)\rangle = x_1^2y_1 + 2x_2y_2^2 - x_1y_2 - x_2y_1$.

(h) En $\mathbb{R}^3$, $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = (x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

(i) En el espacio de las matrices $M_{2\times 2}$, $\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(AB)^t$ (tr A = Traza de la matriz A).

19. Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos vectores de un espacio vectorial euclidiano E. Demuestre que

(a) $|\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle| \leq \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|$.

(b) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ si y solo si $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$.

(c) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{b}\|^2$.

(d) Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son linealmente dependientes, entonces $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|$.

20. Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ vectores de un espacio vectorial euclidiano E. Demuestre que

(a) Si $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, entonces

$$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \rangle - 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 .$$

(b) Si $\boldsymbol{c}$ es ortogonal a cada uno de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{c}$ es ortogonal a cualquier combinación lineal de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

21. Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores arbitrarios en un espacio con producto interior (espacio euclidiano) y suponga que $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|$. Demuestre que $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ son ortogonales.

22. Sea $V = C[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$. Se define en V la operación

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\; dx.$$

(a) Verifique que $\langle f, g \rangle$ es un producto interior en V.

(b) Sean $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$ en $C[0, 2\pi]$. Encuentre **a)** $\langle f, g \rangle$, **b)** $\|f\|$.

(c) ¿Son ortogonales f y g en $C[0, 2\pi]$?

23. Sea $V = C[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si f y g pertenecen a $V = C[a,b]$, se define el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\; dx.$$

Para $C[-1,1]$

(a) Calcule $\langle f, g \rangle$ para

1. $f(x) = 1, \quad g(x) = 3 + 2x$ 2. $f(x) = 1, \quad g(x) = x - 1$.

(b) Calcule el ángulo entre las funciones de la parte anterior 23a.

(c) Calcule la longitud del vector $f(x) = x^3$.

(d) Calcular la distancia entre los vectores $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$.

(e) Si $f(x) = \sqrt{x}$, determine los valores de a y b para los cuales $g(x) = a + bx$ es ortogonal a f.

24. En $\mathbb{P}_3$ se considera el producto interno

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\; dx.$$

Calcular la norma de los siguientes polinomios

a. 1 *b.* x *c.* $x^2 - 1$ *d.* $\frac{1}{3}\left(3x^2 - 1\right)$.

25. Comprobar, en cada caso, si los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales.

(a) $\{(1,1,0),\ (2,-2,1),\ (-1,1,4)\}$ de $\mathbb{R}^3$, con el producto interno canónico.

(b) $\{(1,-2,1), \ (3,1,-1), \ (-2,3,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{y}, \qquad \text{siendo} \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $\{(1,1,2,0), \ (1,1,0,-1), \ (2,2,0,4)\}$ de $\mathbb{R}^4$, con el producto canónico.

26. En el espacio vectorial $\mathbb{P}_3$ se define los productos internos

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \ dx \qquad \text{y} \qquad \langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{p(x) q(x)}{\sqrt{1-x^2}} \ dx.$$

Diga, usando los productos internos anteriores, si el conjunto de vectores dado es ortogonal

a. $\left\{1, \ \dfrac{3x^2-1}{3}, \ x^3\right\}$ *b.* $\left\{x, \ x^2, \ 4x^3-3x\right\}$

27. Encuentre la proyección ortogonal de $\boldsymbol{u}$ sobre $\boldsymbol{a}$.

a. $\boldsymbol{u} = (6,2), \quad \boldsymbol{a} = (3,-9)$ *b.* $\boldsymbol{u} = (-1,-2), \quad \boldsymbol{a} = (-2,3)$

c. $\boldsymbol{u} = (3,1,-7), \quad \boldsymbol{a} = (1,0,5)$ *d.* $\boldsymbol{u} = (1,0,0), \quad \boldsymbol{a} = (4,3,8)$.

28. Encuentre el complemento ortogonal de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$, donde se considera el producto interior canónico

a. $H = \text{gen}\left[(1,2,0,-1), \ (2,-1,-3,2)\right]$ *b.* $W = \text{gen}\left[(1,1,0,0), \ (-1,2,1,2), \ (0,1,0,-1)\right]$

c. $H = \text{gen}\left[(x_1,x_2,x_3,x_4) \ / \ x_1 - 2x_3 + x_4 = 0\right]$.

29. Sea $\mathbb{P}_3$, con el producto interno

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{0}^{1} p(x) q(x) \ dx.$$

Obtener el complemento ortogonal de cada uno de los siguientes subespacios.

a. $H = \text{gen}\left[1, \ x^2+1\right]$ *b.* $W = \text{gen}\left[x^3-2\right]$.

30. Se considera el producto interno canónico en $\mathbb{R}^3$.

(a) Aplique el método de ortonornalización de Gram-Schmidt para hallar una base ortogonal para la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $\beta = \{\boldsymbol{v_1} = (1,0,1,0), \ \boldsymbol{v_2} = (1,1,1,0), \ \boldsymbol{v_3} = (1,1,0,0)\}$.

(b) Escriba el vector $\boldsymbol{z} = (2,3,1)$ como combinación lineal de los vectores de la base obtenida.

31. Se considera el producto interno canónico en $\mathbb{R}^4$.

(a) Aplicando el método de Gram-Schmidt, hallar una base ortogonal del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\boldsymbol{v_1} = (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{v_2} = (1,1,1,0)$, $\boldsymbol{v_3} = (1,1,0,0)$.

(b) Hallar la proyección del vector $\boldsymbol{z} = (2,0,-1,3)$ sobre $\text{gen}\left[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\right]$

32. Sea $\boldsymbol{z} = (1,-1,2,-2)$ un vector de $\mathbb{R}^4$. Hallar su proyección sobre el subespacio

$$\text{gen}\left[(1,0,1,0), \ (1,-1,1,-1), \ (2,-1,2,-1), \ (1,1,1,1)\right].$$

Se considera el producto interno canónico.

33. En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno Euclídeo. Use el método de ortonormalización de Gram-Schmidt para transformar la base $\beta = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\}$ en una base ortonormal.

    1. $\boldsymbol{u_1} = (1, -3,)\,, \quad \boldsymbol{u_2} = (2, 2)$
    2. $\boldsymbol{u_1} = (1, 0)\,, \quad \boldsymbol{u_2} = (3, -5)\,.$

34. En $\mathbb{R}^3$ con el producto $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$. Use el método de ortonormalización de Gram-Schmidt para transformar $\{(1,1,1)\,,\ (1,1,0)\,,\ (1,0,0)\}$ en una base ortonormal.

35. Hallar bases ortonormales para el núcleo y la imagen de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

36. Sea $B = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Demuestre que si $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u_1} + c_2\boldsymbol{u_2} + c_3\boldsymbol{u_3}$, entonces $c_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u_i}$, para $i = 1, 2, 3$.

37. Considere el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$, de los polinomios de grado a lo sumo 2, equipado con el siguiente producto interno

$$\text{si} \quad p, q \in \mathbb{P}_2, \quad \text{entonces} \quad \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\ dx.$$

    Aplique el método de ortonormalización de Gram-Schmidt para transformar la base dada por los vectores

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = x + x^2, \qquad p_3(x) = 1 + x^2$$

    en una base ortonormal.

38. Sea $H = \{(x, y, z)\ /\ 2x - y - 2z = 0\}$.

    (a) Demostrar que $B = \{(1,0,1)\,,\ (2,2,1)\}$ es una base de H.

    (b) Hallar una base ortonormal para H.

39. Hallar una base ortonormal para el conjunto de vectores solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \dfrac{2}{3}\,x + \dfrac{4}{3}\,y + 2z = 0. \end{cases}$$

40. Sea $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x = y + 2z\right\}$ y $\boldsymbol{v} = (1, 1, 1)$. Sea $H^\perp$ el complemento ortogonal de H. Hallar $\boldsymbol{h} \in H$ y $\boldsymbol{p} \in H^\perp$, tales que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{p}$.

41. Sea $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x = t,\ y = -t,\ z = 2t\right\}$ y $\boldsymbol{v} = (0, 1, -1)$. Hallar

    1. Una base ortonormal de H.
    2. $H^\perp$, el complemento de H.
    3. Una base ortonormal de $H^\perp$.
    4. $\boldsymbol{h} \in H$ y $\boldsymbol{p} \in H^\perp$, tales que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{p}$.

42. Sea la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

    Determinar

(a) La matriz escalonada reducida por filas de A.
(b) Una base para el núcleo de A.
(c) Una base para la imagen de A, nulidad y rango.
(d) Una base para el espacio fila de A y su dimensión.
(e) Una base ortonormal para el núcleo de A.
(f) Completar la base del espacio fila hasta formar una base de $\mathbb{R}^5$.

43. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por los vectores

$$S = \text{gen}\left[(2,-1,1,3,0)\,,\ (4,3,1,5,-4)\,,\ (2,-1,2,-2,3)\,,\ (1,2,0,1,-2)\,,\ (3,1,2,-1,1)\right].$$

Determine una base para $S^{\perp}$.

44. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ con base $\beta = \{(1,1,0,1)\,,\ (0,1,1,0)\,,\ (-1,0,01)\}$. Encuentre $\text{proy}_S\boldsymbol{v}$, donde $\boldsymbol{v} = (0,2,0,3)$.

45. Dados el subespacio $H = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ y el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{R}^4$.

(a) Halle una base ortonormal para $H^{\perp}$, el complemento ortogonal de H.
(b) Calcula la proyección ortogonal de $\boldsymbol{x}$ sobre H.

46. Considere los siguientes subespacios H y vectores $\boldsymbol{v}$

(a) $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x - 2y + 6z = 0\right\}$, $\boldsymbol{v} = (-3,1,4)$.

(b) $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}\right\}$, $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$.

(c) $H = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 = x_2;\ \ x_4 = 3x_2\right\}$, $\boldsymbol{v} = (-1,2,3,1)$.

1. Calcule $\text{proy}_S\boldsymbol{v}$
2. Encuentre una base ortonormal para $S^{\perp}$
3. Escriba $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, donde $\boldsymbol{u} \in S$ y $\boldsymbol{w} \in S^{\perp}$.

47. Considere los vectores $\boldsymbol{v} = (3,5,1,3)$, $\boldsymbol{v_1} = (1,0,-1,0)$ y $\boldsymbol{v_2} = (2,-2,0,1)$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Encuentre

(a) El vector proyección ortogonal del vector $\boldsymbol{v}$ sobre el subespacio vectorial S generado por los vectores $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$.
(b) Una base ortonormal para el complemento ortogonal $S^{\perp}$ de S.

48. Dado el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} x + y + z - 2w = 0 \\ x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y + z - 4w = 0 \end{cases}$$

(a) Halle una base ortonormal para el espacio S, solución del sistema.
(b) Halle el espacio $S^{\perp}$, complemento ortogonal de S.
(c) Halle la proyección ortogonal del vector $\boldsymbol{v} = (-3,5,1,0)$ sobre el espacio S.

49. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERAS** ó **FALSAS**.

   (a) Si A es equivalente por filas a la identidad, entonces $C_A = C_I$.

   (b) Si A es invertible, entonces $R_A = C_A$.

   (c) Si $\rho(A) = n$ y B y C son $n \times n$, tales que $AB = AC$, entonces $B = C$.

   (d) Sea $B = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Si $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u_1} + c_2\boldsymbol{u_2} + c_3\boldsymbol{u_3}$, entonces $c_i = \boldsymbol{v} \cdot u_i$, para $i = 1, 2, 3$.

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.
3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.
4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Transformaciones lineales.

Objetivos a cubrir **Código : MAT-3.8**

- Transformaciones lineales. Representación matricial asociada a la transformación.
- Núcleo e imagen de una transformación.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 151 *: Construya una transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *que tenga por núcleo la recta de ecuación* $L : \dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z}{5}$ *y por imagen el plano de ecuación* $\pi : x - 2y + z = 0.$

Solución : Tenemos que el núcleo de la transformación es el subespacio generado por el vector director de la recta, es decir

$$\operatorname{Nu}(T) = \operatorname{gen}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$$

por otro lado, la imagen de T viene dada por los vectores, tal que $x = 2y - z$, así,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$\operatorname{Imagen}(T) = \operatorname{gen}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Observemos que una base de $\mathbb{R}^3$, viene dada por

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

ya que, los vectores son L.I.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

entonces, los vectores columnas son L.I. Deseamos hallar la transformación, tal que

$$T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

como β es una base de $\mathbb{R}^{\nvDash}$, entonces todo vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se puede escribir como una combinación lineal de dichos vectores, es decir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de aquí,

$$\left\{\begin{array}{l} 2\alpha_1 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = y \\ 5\alpha_1 + \alpha_3 = z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \dfrac{x}{2} \\ \alpha_2 = y - \dfrac{x}{2} \\ \alpha_3 = z - \dfrac{5x}{2} \end{array}\right. ,$$

entonces,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(y - \frac{x}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(z - \frac{5x}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T\left(\frac{x}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) + T\left(\left(y - \frac{x}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + T\left(\left(z - \frac{5x}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

como T, es una transformación lineal, se tiene

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{x}{2}\,T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(y - \frac{x}{2}\right)T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(z - \frac{5x}{2}\right)T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{x}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(y - \frac{x}{2}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(z - \frac{5x}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3x}{2} + 2y - z \\ y - \dfrac{x}{2} \\ z - \dfrac{5x}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, la transformación buscada es

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3x}{2} + 2y - z \\ y - \dfrac{x}{2} \\ z - \dfrac{5x}{2} \end{pmatrix}$$

★

Ejemplo 152 *: Sea $T : P_2 \to P_2$, tal que $T(p(x)) = -xp'(x)$, para todo $p \in P_2$.*

1. *Demostrar que T es una transformación lineal.*
2. *Sea β_1 la base canónica de P_2 y $\beta_2 = \{1,\ 1+x,\ 1+x^2\}$ otra base. Hallar la matriz de representación de T con respecto a β_1 en el espacio de partida y β_2 en el de llegada.*
3. *Determine el núcleo y la imagen de T.*
4. *Halle la nulidad y el rango de T.*

Solución : 1. Sean $p, q \in P_2$, entonces

$$T(p(x) + q(x)) = -x(p(x) + q(x))' = -x(p'(x) + q'(x)) = -xp'(x) - xq'(x) = T(p(x)) + T(q(x)),$$

por otra parte, si α es un escalar, entonces,

$$T(\alpha p(x)) = -x(\alpha p(x))' = -x\alpha p'(x) = \alpha(-xp'(x)) = \alpha T(p(x)),$$

por lo tanto, T es una transformación lineal.

2. Tenemos que
$$\beta_1 = \{1, \; x, \; x^2\} \qquad \text{y} \qquad \beta_2 = \{1, \; 1+x, \; 1+x^2\},$$
entonces,
$$T(1) = -x(1)' = 0 = 0(1) + 0(1+x) + 0\left(1+x^2\right)$$
$$T(x) = -x(x)' = -x = 1(1) - 1(1+x) + 0\left(1+x^2\right)$$
$$T\left(x^2\right) = -x\left(x^2\right)' = -2x^2 = 2(1) + 0(1+x) - 2\left(1+x^2\right)$$
con lo que la matriz de la transformación viene dada por
$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Busquemos el núcleo y la imagen de T. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz asociada a la transformación.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2\to F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3\to F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2\to F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
de aquí, si los coeficientes de todo polinomio de P_2, vienen dado por (a,b,c), se tiene que
$$b = 0 \qquad \text{y} \qquad c = 0.$$

Luego, el núcleo de T es generado por
$$\text{Nu}(T) = \text{gen}[1]$$
y la imagen viene dada por
$$\text{Imagen}(T) = \text{gen}\left[1-x, 1-x^2\right]$$

4. Se tiene que la nulidad de T es igual a 1 y el rango de T es igual a 2. ★

Ejemplo 153 *: Sea* $V = \text{gen}[1, \; \cos x, \; \text{sen}\, x]$*, definimos sobre* V *el producto interno dado por*
$$< f, g >= \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\; dx.$$
Sea $T : V \to V$*, una aplicación, tal que* $T(f(a)) = f(x+a)$ *con* a *un número real fijo y* f *en* V*.*

1. *¿El conjunto de vectores* $\{1, \; \cos x, \; \text{sen}\, x\}$ *forman una base para* V*?*
2. *Demostrar que* T *es una transformación lineal.*
3. *Hallar la matriz,* A_T*, asociada a* T*.*
4. *Comprobar que* A_T *es ortogonal.*

Solución : 1. Observemos que

$$\int_0^{2\pi} \cos x \ dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \ dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos x \operatorname{sen} x \ dx = 0,$$

es decir, el conjunto de vectores $\{1, \ \cos x, \ \operatorname{sen} x\}$ es ortogonal, por lo tanto, es L.I., luego los vectores forman una base para V.

2. Tenemos que

$$T((f+g)(a)) = (f+g)(x+a) = f(x+a) + g(x+a) = T(f(a)) + T(g(a))$$

y

$$T((kf)(a)) = (kf)(x+a) = kf(x+a) = kT(f(a)).$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal.

3. Tenemos que

$$T(1) = 1 = (1)1 + (0)\cos x + (0)\operatorname{sen} x$$

$$T(\cos a) = \cos(x+a) = \cos x \cos a - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} a = (0)1 + (\cos a)\cos x + (-\operatorname{sen} a)\operatorname{sen} x$$

$$T(\operatorname{sen} a) = \operatorname{sen}(x+a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a = (0)1 + (\operatorname{sen} a)\cos x + (\cos a)\operatorname{sen} x$$

La matriz asociada a T viene dada por

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \operatorname{sen} a \\ 0 & -\operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix}$$

4. Una matriz Q es ortogonal si $Q^t Q = I$, así

$$A_T^t A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\operatorname{sen} a \\ 0 & \operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \operatorname{sen} a \\ 0 & -\operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, la matriz A_T es una matriz ortogonal. ★

Ejemplo 154 : *Determinar si la siguiente proposición es* ***VERDADERA*** *o* ***FALSA****. Justifique su respuesta.*

"La aplicación $T : M_{3\times 3} \to \mathbb{R}$, dada por $T(A) = \det A$ es una transformación lineal."

Solución : Tenemos que,

$$T(A+B) = \det (A+B) \neq \det A + \det B = T(A) + T(B),$$

luego, la proposición es **FALSA** ★

Ejercicios

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales
   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y, z) = (y + z, x - y + 3z).$
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad T(x, y) = (-x + y, x - 3y, 3x + y, 0).$
   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y, z) = (2xy + 3z, 2xz - 2y).$
   (d) $T : P_3 \to P_2, \quad T(p(x)) = p'(x).$
   (e) $T : P_3 \to P_3, \quad T(p(x)) = p(0).$
   (f) $T : P_2 \to \mathbb{R}, \quad T\left(a + bx + cx^2\right) = a + b + c.$
   (g) $T : P_3 \to P_2, \quad T(p(x)) = p(0) - p'(x).$
   (h) $T : M_{3\times3} \to M_{3\times3}, \quad T(A) = A + 2I.$
   (i) $T : M_{3\times3} \to \mathbb{R}, \quad T(A) = \mathrm{tr}A. \quad (\mathrm{tr}(A) : \text{Traza de } A)$
   (j) $T : M_{3\times3} \to \mathbb{R}, \quad T(A) = \det A.$
   (k) $T : M_{3\times3} \to P_2, \quad T(A) = a_{11} + a_{12} + a_{13}.$
2. Encontrar, si es posible, en cada caso una transformación lineal con las siguientes propiedades
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(1, -1) = (1, -1, 0), \quad T(-1, 2) = (0, 1, -1).$
   (b) $T : P_2 \to P_2, \quad T\left(x^2\right) = x + 1, \quad T(x) = x^2 + 1, \quad T(1) = 0.$
   (c) $T : P_1 \to P_2, \quad T(x) = x^2 + 1, \quad T(x + 1) = 0$
3. Calcular la imagen y el núcleo de las siguientes transformaciones lineales
   a. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y) = (2x + y, 3y, x + y)$
   b. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y, z) = (x - y, y - z)$
   c. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + 2y, x + z, 2y + z)$
   d. $T : P_3 \to P_2,\ T(p(x)) = p'(x)$
   d. $T : P_2 \to P_2,\ T(p(x)) = xp'(x)$
   e. $T : M_{3\times3} \to \mathbb{R},\ T(A) = \mathrm{tr}(A) \quad (\mathrm{tr}(A) : \text{Traza de } A)$
4. Se sabe que $\dim \mathrm{Nu}(T) = 2$. Hallar la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$, cuando la transformación lineal T está definida en cada uno de los siguientes espacios vectoriales:
   1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ 2. $T : P_4 \to P_4$ 3. $T : P_3 \to \mathbb{R}^2$ 4. $T : M_{3\times3} \to \mathbb{R}^8$
5. Se sabe que $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$. Hallar la dimensión del núcleo de T, cuando la transformación lineal T está definida en cada uno de los siguientes espacios vectoriales
   1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 2. $T : P_1 \to P_1$ 3. $T : P_3 \to \mathbb{R}^5$ 4. $T : M_{3\times3} \to M_{3\times1}$
6. Sea $T : P_3 \to P_2$ definida por $T\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = (a - b) + (b - c)x + (c - a)x^2.$
   (a) Demuestre que T es una transformación lineal.
   (b) Halle la representación matricial de T respecto a las bases canónicas.

(c) Encuentre para T el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango.

7. Una transformación lineal $T : M_{2\times 2} \to P_3$, satisface

$$T(1,0,0) = 1 + x^2, \qquad T(0,1,0) = x + x^2, \qquad \text{y} \qquad T(0,0,1) = 0.$$

Determine

(a) La imagen $T(a,b,c)$ para cualquier vector (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$.

(b) La matriz que representa a T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y P_2.

(c) La imagen y el núcleo de T con sus respectivas dimensiones.

8. Construya una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenga por núcleo la recta de ecuación $L : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = z$ y por imagen el plano de ecuación $\pi : x + y + z = 0$.

9. Sea $T : P_2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p'(1) \\ p''(1) \end{pmatrix}$.

(a) Demuestre que T es una transformación lineal.

(b) Encuentre la matriz asociada a T respecto a las bases canónicas de P^2 y $\mathbb{R}^3$.

10. Sea T la transformación $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, donde $M_{2\times 2}$ es el espacio vectorial de las matrices reales de orden 2×2, definida por $T(A) = A - A^t$ para cada matriz $A \in M_{2\times 2}$ (A^t es la matriz transpuesta de A).

(a) Demuestre que T es una transformación lineal.

(b) Escriba la representación matricial de T respecto a la base estándar de $M_{2\times 2}$.

(c) Encuentre bases para el núcleo y la Imagen de T y sus respectivas dimensiones.

(d) Halle la representación matricial de T respecto a la base

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

11. Encuentre una transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{Im } T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + z = 0 \right\}.$$

12. Sea $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definida por $T(A) = A^t$, donde A^t denota la traspuesta de A.

(a) Demuestre que T es una transformación lineal.

(b) Encuentre la matriz A_T, es decir, la representación matricial de T en la base canónica de $M_{2\times 2}$.

(c) Encuentre el núcleo y el rango de T.

(d) Encuentre el espacio imagen y el rango de T.

13. Sean $V = \text{gen}\,[1, \ \cos x, \ \operatorname{sen} x]$ y $T : V \to V$, tal que $T(f(a)) = f(x + a)$ con a un número real fijo y f en V.

(a) Demostrar que T es una transformación lineal.

(b) Hallar la matriz, A_T, asociada a T.

(c) Comprobar que A_T es ortogonal.

(d) Hallar núcleo, nulidad, imagen y rango de T.

14. Encuentre todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que la recta $y = 0$ se transforme en la recta $x = 0$.

15. (a) Hallar todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tales que convierten la recta
$$L_1 = \{(x, y) \ / \ y = 2x\}$$
en la recta $L_2 = \{(x, y) \ / \ y = 3x\}$.
   (b) Hallar la matriz de representación de T con respecto a la base canónica.

16. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tal que
$$T(1,0,0,0) = (1,2,3,4), \qquad T(0,1,0,0) = (2,1,3,5), \qquad T(1,0,1,0) = (0,3,3,3),$$
$$T(0,1,0,1) = (2,7,9,11).$$
   (a) Hallar núcleo, nulidad, imagen y rango de T.
   (b) Hallar una base ortonormal del espacio fila de la matriz de representación de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

17. Sea $T : P_2 \to P_2$, tal que $T(p(x)) = -xp'(x)$, para todo $p \in P_2$.
   (a) Demostrar que T es una transformación lineal.
   (b) Sea β_1 la base canónica de P_2 y $\beta_2 = \{1, \ 1+x, \ 1+x^2\}$ otra base. Hallar la matriz de representación de T con respecto a β_1 en el espacio de partida y β_2 en el de llegada.

18. Sea $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 3}$, definida como
$$T(A) = AB, \qquad \text{con} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Demuestre que T es una transformación lineal.
   (b) Determine el núcleo de T.
   (c) Halle la nulidad y el rango de T.
   (d) Indique si $E = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ pertenece a la imagen de T. Justifique su respuesta.

19. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to P_2$,
$$T(0,0,0,1) = 4x \qquad T(0,0,1,0) = 4x^2 \qquad T(0,1,0,0) = 5 \quad \text{y} \quad T(1,0,0,0) = 2x.$$
   (a) Encuentre una fórmula para T.
   (b) Encuentre una base y la dimensión del núcleo de T.
   (c) Encuentre el rango de T.

20. (a) Hallar una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que tiene como imagen el subespacio generado por $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 2)$.
   (b) Hallar su núcleo y nulidad.
   (c) Hallar $T(1, 3, 7)$.

21. Sea $\boldsymbol{u} = (a, b, c)$ no nulo en $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(\boldsymbol{u}) = \operatorname{proy}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}$, para todo $\boldsymbol{v}$ en $\mathbb{R}^3$.
   (a) Demostrar que T es una transformación lineal.
   (b) Hallar la representación matricial de T.

(c) Hallar bases para el núcleo y la imagen de T.

(d) Calcular nulidad y rango de T.

22. Sean $\boldsymbol{u} = (1,3)$, $\boldsymbol{v} = (1,-1)$ y $\boldsymbol{w} = (1,2)$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$T(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{u}, \qquad T(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{v} \quad \text{y} \quad T(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{w}$$

(a) Hallar la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas.

(b) Hallar núcleo, nulidad, imagen y rango de T.

23. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(x,y,z,w) = (kx + y + z - w, x + ky + z - w)$

(a) Hallar k tal que $v(T) > 2$.

(b) Con ese valor de k hallar núcleo, nulidad, imagen y rango de T.

24. Construir la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tal que

$$T(1,0,0) = (1,1,1,0), \qquad T(0,1,1) = (-1,1,-1,2), \quad \text{y} \quad T(1,0,1) = (1,1,0,1).$$

25. Sea $T : M_{2\times 2} \to P_3$, tal que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b - 2c + (-a + 2b + 3c + d)\,x + (4b + 4c - d)\,x^2 + (2a + 3b + c + 2d)\,x^3$$

(a) Hallar una base para el núcleo y la imagen de T.

(b) Hallar la nulidad y el rango de T.

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.
3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.
4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Matemática III - Guía 9

Autovalores y autovectores de una matriz.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-3.9

- Autovalores y autovectores de una matriz.
- Diagonalización de una matriz.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 155 *: Sean* $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *una matriz diagonalizable y* $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *la matriz diagonalizante.*

1. *Encuentre los valores de* a *y* b *en* $\mathbb{R}$ *para los cuales* B *sea semejante a una matriz diagonal* D.
2. *¿Cuáles son los autovalores y autovectores de* B^n, *con* $n \in \mathbb{N}$*?*

Solución : a. Tenemos que

$$D = C^{-1}BC \qquad \Longrightarrow \qquad B = CDC^{-1}$$

entonces, calculamos la inversa de C

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

luego,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{entonces} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

así

$$C^{-1}BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-b+1 & -a+b-1 \\ 0 & b & -b+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

como D es diagonal, se tiene que cumplir que

$$\left\{ \begin{array}{r} a-b+1=0 \\ -a+b-1=0 \\ -b+3=0 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad a=2 \quad \text{y} \quad b=3$$

b. Puesto que,

$$B = CDC^{-1} \qquad \text{y} \qquad B^n = CD^nC^{-1}$$

entonces los autovalores de B^n son

$$\lambda_1 = 2^n, \qquad \lambda_2 = 3^n \qquad \text{y} \qquad \lambda_3 = 1$$

y los autovectores son los mismos de B. ★

Ejemplo 156 : *Determinar si la siguiente proposición es* ***VERDADERA*** *o* ***FALSA***. *Justifique su respuesta.*

"Si $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$ es el polinomio característico de A, entonces $|A| = 3$."

Solución : Si $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$ es el polinomio característico de A, entonces los autovalores de A, son

$$\lambda_1 = 1 + i\sqrt{2}, \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = 1 - i\sqrt{2},$$

luego, la matriz es diagonalizable y A es semejante a la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y se tiene que,

$$|A| = |D| = \begin{vmatrix} 1+i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-i\sqrt{2} \end{vmatrix} = 3,$$

por lo tanto, la proposición es **VERDADERA**. ★

Ejemplo 157 : *Determinar si la siguiente proposición es* ***VERDADERA*** *o* ***FALSA***. *Justifique su respuesta.*

"La suma de dos matrices diagonalizables es diagonalizable."

Solución : Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ambas son diagonalizables, ya que sus autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, pero

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable, puesto que, su único autovalor, $\lambda = 1$, tiene multiplicidad algebraica 2 y si $\boldsymbol{v} = (a, b)$, entonces,

$$(A - I)\, v = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que nos da una multiplicidad geométrica igual a 1, por lo tanto, $A+B$ no es diagonalizable y la proposición es **FALSA**. ★

Ejercicios

1. Hallar el polinomio característico de las siguientes matrices. Obtener los subespacios propios, la multiplicidad algebraica y la geométrica en cada una de las siguientes matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 11 \end{pmatrix}$

6. $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 & -3 \\ 7 & 8 & 0 & 9 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

11. $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

12. $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ diagonalizable, con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y vectores propios $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$. Se pide

   (a) Hallar los valores y vectores propios de la matriz $I + hA$, donde h es un escalar cualquiera.

   (b) ¿Qué relación debe existir entre los valores propios de A y h, para que la matriz $I + hA$ sea invertible?

   (c) Demostrar que si $\boldsymbol{u}$ es un vector propio de las matrices A y B también lo es de $A + B$. Hallar el vector propio correspondiente.

   (d) Hallar bases de los subespacios propios de A y A^t, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, y comprobar que no coinciden.

3. Encuentre una matriz diagonal semejante a

   1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
   2. $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
   3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Encontrar los valores de a y b para que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sean semejantes mediante la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$

5. Comprobar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tienen el mismo determinante, el mismo rango y la misma traza, pero no son semejantes.

6. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Obtener

(a) Los valores y vectores propios de cada una de ellas.

(b) Una base de los subespacios propios.

(c) Diagonalizarlas si es posible.

7. La matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$, admite como vector propio a

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz A y sus valores propios.

8. De una matriz $A_{3\times 3}$ se sabe que

i. Sus autovalores son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$ con $\text{ma}(\lambda_1) = 2$, $\text{ma}(\lambda_2) = 1$, $\text{mg}(\lambda_1) = \text{ma}(\lambda_2) = 1$.

ii. $\boldsymbol{v_1} = (2, -1, -2)$ y $\boldsymbol{v_2} = (3, -3, 3)$ son los autovectores de A asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente.

iii. El polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16$

Entonces

(a) ¿Es A diagonalizable? (b) Calcular $|A|$. (c) Hallar los autovalores de A^t y de A^2.

(d) Hallar los autovalores de $p(A)$. (e) ¿Se satisface que $A^4 + 20a^2 = 8A^3 + 16A$?

9. De una matriz $A_{3\times 3}$ se sabe que

i. $\lambda = -2$ es autovalor de A con $\text{mg}(\lambda) = 1$, y $\text{ma}(\lambda) = 3$.

ii. $\boldsymbol{v_1} = (5, 3, -7)$ es autovector de A asociados a λ.

iii. $(2I + A)\,\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_1}$ con $\boldsymbol{v_2} = (1, 2, 0)$ y $(2I + A)\,\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{v_2}$ con $\boldsymbol{v_3} = (25, 1, 0)$.

(a) ¿Es A diagonalizable? (b) Calcular $|A|$.

(c) Hallar los autovalores de A^2 y los de A^{-1}, si existen.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Hallar A^{12}.

11. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

   (a) Hallar el valor de α, tal que $\lambda = 3$ sea autovalor de A.

   (b) Determinar si A es diagonalizable.

   (c) Considere la matriz
$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$
   Hallar los autovalores de B sin utilizar su polinomio característico.

12. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Hallar $(A+I)^{100}$.

13. Determine los valores α y β para los cuales la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tenga como único autovalor a $\boldsymbol{v} = (1,1)$.

14. Hallar la matriz $A_{2\times 2}$, tal que $\lambda_1 = 1$ sea un autovalor de A asociado al autovector $\boldsymbol{v_1} = (1,0)$ y $\lambda_2 = 3$ un autovalor de A asociado al autovector $\boldsymbol{v_2} = (1,1)$.

15. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 8 & -5 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 8 & 1 & 2 & 2 & -9 \\ 8 & -1 & 2 & 3 & -8 \\ -5 & -2 & -9 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

   (a) ¿El sistema de ecuaciones $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución única?

   (b) ¿$v(A) = 0$? ¿0 es autovalor de A?

   (c) ¿$\lambda = 2 + 3i$ es autovalor de A?

16. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ \alpha + 1 & \alpha \end{pmatrix}$. Hallar los valores de α, tales que A sea diagonalizable.

17. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERA** o **FALSA**. Justifique su respuesta.

   (a) Si λ es autovalor de A, entonces λ^2 es autovalor de A^2.

   (b) Si λ es autovalor de A, y α es un número real, entonces $(\lambda - \alpha)^2$ es autovalor de $(A - \alpha I)^2$.

   (c) Si A es diagonalizable, entonces A^2 también lo es.

   (d) A es invertible si y sólo si es diagonalizable.

   (e) Toda matriz $A_{n\times n}$ simétrica real tiene n autovalores distintos.

   (f) Si $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$ es el polinomio característico de A, entonces se cumple que
$$A^3 + I = A(A + I).$$

   (g) Si la matriz $A_{3\times 3}$ tiene autovalores 1, -2 y 3, entonces $A^4 + 6A = 2A^3 + 5A^2$.

   (h) Si $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$ son autovectores linealmente independientes de A asociados al autovalor λ, entonces $c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2}$ es autovector de A asociado a λ, con c_1 y c_2 constantes no nulas.

(i) Si $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$ son autovectores cualesquiera de A asociados al autovalor λ, entonces $\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}$ es autovector de A asociado a λ.

(j) Si A y B de tamaño $n\times n$ tienen los mismos autovalores, entonces son semejantes.

(k) Si $p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+3$ es el polinomio característico de A, entonces $|A|=3$.

(l) Si A y B matrices $n\times n$, son semejantes ortogonalmente, entonces A^t y B^t lo son.

(m) Sea $A_{3\times 3}$ con $p(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6$ su polinomio característico, siendo λ_1, λ_2 y λ_3 sus autovalores. Entonces

$$6\text{Adj } A=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(A^2-2A-5I\right)$$

(n) Si $\boldsymbol{v}$ es un autovector de A y B, matrices $n\times n$, con autovalores asociado λ y α respectivamente y $\rho(B)=n$, entonces $\boldsymbol{v}$ es autovector de $B^{-1}A^2$ asociado al autovalor $\alpha^{-1}\lambda^2$.

(o) La matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable para todo a complejo.

(p) Si $|A|=|B|$ con A y B matrices $n\times n$, entonces A y B son semejantes.

(q) Si λ_1 y λ_2 son autovalores cualesquiera de las matrices A y B, de tamaño $n\times n$, respectivamente, entonces $\lambda_1+\lambda_2$ es autovalor de $A+B$.

(r) Si $\boldsymbol{v_1}=(1,0,-1)$ y $\boldsymbol{v_2}=(0,1,1)$ son autovectores de A asociados a los autovalores distintos λ_1 y λ_2 respectivamente, entonces A es simétrica.

(s) Si A y B son semejantes, entonces A^2 y B^2 lo son.

(t) La matriz cuadrada A es no invertible si y sólo si $\lambda=0$ es un valor propio de A.

(u) Si A es diagonalizable, entonces A^t también lo es.

(v) La suma de dos matrices diagonalizables es diagonalizable.

18. Encuentre la matriz ortogonal que diagonaliza la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

19. Sea Q una matriz ortogonal simétrica. Demuestre que si λ es un valor propio de Q, entonces $\lambda=\pm 1$.

20. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Hallar los autovalores y autovectores de A.

(b) Diga si A es diagonalizable. En caso afirmativo, halle dos matrices D y P, tales que D sea diagonal y $P^{-1}AP=D$.

21. ¿Para qué valores de k es diagonalizable la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

22. ¿Para qué valores de b es diagonalizable la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$?

23. Demuestre que si A^2 es una matriz diagonalizable, entonces A^4 es diagonalizable.

24. Sea λ un valor propio de la matriz A, demuestre que $\lambda - a$ es un valor propio de la matriz $A - aI$.

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.
3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.
4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.